第10講　指数関数・対数関数

1 [1]　a, b, c が正の数で, $a\neq1$, $c\neq1$ のとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

[2]　等式 $\log_3 x-\dfrac{1}{\log_9 x}=(-1)^x$ を満たす正の整数 x の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　p を実数の定数として，実数 x の関数を $f(x)=25^x+\dfrac{1}{25^x}+2p\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}-1\right)+7$ とする．$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ とおき，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく．

(1)　関数 $g(t)$ を求めよ．

(2)　方程式 $g(t)=0$ が実数解をただ１つもつとき，p の値と解 t の値を求めよ．

(3)　方程式 $g(t)=0$ が次の条件を満たす２個の実数解 t_1，t_2 をもつとき，p がとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ．

(i)　$t_1<2$，$t_2>2$　　(ii)　$t_1=2$，$t_2>2$　　(iii)　$2<t_1<t_2$

(4)　t を定数とみなし，$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ を x の方程式とみなして，この方程式が異なる２つの実数解 x をもつように t の値を定めるとき，t がとり得る値の範囲を求めよ．

(5)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解 x の個数を，p の値で場合分けして求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　2^n が10桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

(2)　2^n+3^n が10桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　指数関数・対数関数

正の数 x が，$2\cdot 9^{x}+3^{x}-3^{-x}+2\cdot 9^{-x}=10$ を満たすとする．$t=3^{x}-3^{-x}$ とおくと，t は 2 次方程式 [ア] $t^{2}+t-$ [イ] $=0$ の解である．したがって，$t=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．また，$9^{x}-9^{-x}=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　指数関数・対数関数

1 [1]　a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$\log_a b = k$　とすると　$b = a^k$

両辺とも c を底とする対数をとると，$a > 0$ より

$$\log_c b = \log_c a^k = k \log_c a \qquad a \neq 1 \text{ より} \quad \log_c a \neq 0$$

よって　$\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = k$

したがって　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

1 [2]　等式 $\log_3 x - \dfrac{1}{\log_9 x} = (-1)^x$ を満たす正の整数 x の値を求めよ．

$\log_3 x - \dfrac{1}{\log_9 x} = (-1)^x$ より　$\log_3 x - \dfrac{2}{\log_3 x} = (-1)^x$

$\log_3 x = t$ とおくと

$$t - \frac{2}{t} = (-1)^x \quad \text{つまり} \quad t^2 - (-1)^x t - 2 = 0 \quad \cdots\cdots ① \quad (\text{明らかに } t \neq 0)$$

(i)　x が偶数のとき

①より　$t^2 - t - 2 = 0$　$(t-2)(t+1) = 0$　　よって　$t = 2,\ -1$

ゆえに　$\log_3 x = 2,\ -1$　より　$x = 3^2,\ 3^{-1}$　　つまり　$x = 9,\ \dfrac{1}{3}$

いずれも偶数ではなく不適．

(ii)　x が奇数のとき

①より　$t^2 + t - 2 = 0$　　$(t+2)(t-1) = 0$　　よって　$t = -2,\ 1$

ゆえに　$\log_3 x = -2,\ 1$　より　$x = 3^{-2},\ 3$　　つまり　$x = \dfrac{1}{9},\ 3$

x は奇数より　$x = 3$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{x = 3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　p を実数の定数として，実数 x の関数を $f(x)=25^x+\dfrac{1}{25^x}+2p\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}-1\right)+7$ とする．$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ とおき，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく．

(1)　関数 $g(t)$ を求めよ．

(2)　方程式 $g(t)=0$ が実数解をただ1つもつとき，p の値と解 t の値を求めよ．

(3)　方程式 $g(t)=0$ が次の条件を満たす2個の実数解 t_1，t_2 をもつとき，p がとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ．

(i)　$t_1<2,\ t_2>2$　　(ii)　$t_1=2,\ t_2>2$　　(iii)　$2<t_1<t_2$

(4)　t を定数とみなし，$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ を x の方程式とみなして，この方程式が異なる2つの実数解 x をもつように t の値を定めるとき，t がとり得る値の範囲を求めよ．

(5)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解 x の個数を，p の値で場合分けして求めよ．

(1)　$25^x+\dfrac{1}{25^x}=(5^x)^2+\left(\dfrac{1}{5^x}\right)^2=\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}\right)^2-2\cdot5^x\cdot\dfrac{1}{5^x}=\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}\right)^2-2$　より

$g(t)=t^2-2+2p(t-1)+7=\boldsymbol{t^2+2pt-2p+5}$

(2)　$g(t)=0$ が実数解をただ1つ，すなわち重解をもつのは判別式 D について

$\dfrac{D}{4}=p^2-(-2p+5)=p^2+2p-5=0$　つまり　$p=-1\pm\sqrt{6}$ のとき

このとき　$g(t)=0$ は重解 $t=-p$ をもつ．

ゆえに　$\boldsymbol{(p,\ t)=(-1\pm\sqrt{6},\ 1\mp\sqrt{6})}$（複号同順）

(3)　(i)　$g(2)=2p+9<0$　より　$\boldsymbol{p<-\dfrac{9}{2}}$

(ii)　$g(2)=0$　より　$\boldsymbol{p=-\dfrac{9}{2}}$　このとき　$g(t)=t^2-9t+14=(t-2)(t-7)$　より

$g(t)=0$ の2解は $t=2,\ 7$　よって，題意を満たす．

(iii)　$g(2)>0$ より　$p>-\dfrac{9}{2}$　　軸：$t=-p>2$ より　$p<-2$

$D>0$ より　$p<-1-\sqrt{6},\ -1+\sqrt{6}<p$　　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6}}$

(4)　$5^x=X$ とおくと，$X>0$ である X の値1つに対し x の値が1つ対応する．

$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}=X+\dfrac{1}{X}$　より　$X^2-tX+1=0$　これが異なる正の2実数解をもつのは，放物線のグラフを考えると　(y 切片)>0 より　軸：$X=\dfrac{t}{2}>0$　かつ　判別式 $t^2-4>0$　　よって　$\boldsymbol{t>2}$　のときである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(5)　$t>2$ である t の値１つに対し，x の値は２つ対応　$t=2$ に対し，x の値は１つ $(x=0)$ 対応　その他の t の値に対応する実数 x は存在しない．

(3)の(iii)で $2<t_1=t_2$ のときは $D=0$ であることを考慮して，(2)より　$p=-1-\sqrt{6}$

以上より　$-\frac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6}$ **のとき　4 個**　$p=-\frac{9}{2}$ **のとき　3 個**

$p<-\frac{9}{2}$，$p=-1-\sqrt{6}$ **のとき　2 個**　$-1-\sqrt{6}<p$ **のとき　0 個**

3　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　2^n が 10 桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

(2)　2^n+3^n が 10 桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

---

(1)　2^n が 10 桁のとき　$10^9\leqq 2^n<10^{10}$

$\log_{10}10^9\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}10^{10}$　$9\leqq n\cdot\log_{10}2<10$

$\frac{9}{0.3010}\leqq n<\frac{10}{0.3010}$　$29.9\cdots\leqq n<33.2\cdots$　よって　$n=30,\ 31,\ 32,\ 33$ の **4 個**

(2)　3^n が 10 桁のとき　$10^9\leqq 3^n<10^{10}$　$9\leqq n\cdot\log_{10}3<10$

$\frac{9}{0.4771}\leqq n<\frac{10}{0.4771}$　$18.8\cdots\leqq n<20.9\cdots$　よって　$n=19,\ 20$

$n=19$ のとき　$\log_{10}2^{19}=19\log_{10}2=19\times 0.3010=5.719$　より　2^{19} は 6 桁

$\log_{10}3^{19}=19\log_{10}3=19\times 0.4771=9.0649$　より　$3^{19}=10^{0.0649}\times 10^9$

$1<10^{0.0649}<10^{0.3010}=2$ より　3^{19} の最高位の数字は 1　よって　$2^{19}+3^{19}$ が 11 桁となることはない．

$n=20$ のとき　$\log_{10}2^{20}=6.02$ より　2^{20} は 7 桁

$\log_{10}3^{20}=9.542=0.542+9$，$\log_{10}4=0.6020$　より　3^{20} の最高位の数字は 3

よって　$2^{20}+3^{20}$ が 11桁となることはない．

$n=18$ のとき　2^{18} は 6 桁以下であり，$\log_{10}3^{18}=0.5878+8$　より　3^{18} の最高位の数字は 3

よって　$2^{18}+3^{18}$ が 10 桁となることはない．

以上より，題意を満たす n の個数は　$n=19,\ 20$ の **2 個**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　指数関数・対数関数

正の数 x が，$2\cdot 9^x+3^x-3^{-x}+2\cdot 9^{-x}=10$ を満たすとする．$t=3^x-3^{-x}$ とおくと，t は 2 次方程式 $\boxed{\text{ア}}\,t^2+t-\boxed{\text{イ}}=0$ の解である．したがって，$t=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．また，$9^x-9^{-x}=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

$t=3^x-3^{-x}$ より　$t^2=(3^x-3^{-x})^2=9^x-2+\dfrac{1}{9^x}$

このとき　$2\cdot 9^x+3^x-3^{-x}+2\cdot 9^{-x}=10$　より

$2(t^2+2)+t=10$

よって t は 2 次方程式　$\mathbf{2}t^2+t-\mathbf{6}=0$　の解である．

$(t+2)(2t-3)=0$　より　$t=\dfrac{3}{2},\ -2$

ここで，$t=3^x-\dfrac{1}{3^x}$ より

$(3^x)^2-t\cdot 3^x-1=0$

$3^x=X$ とおくと，この方程式が $x>0$ に解をもつのは $X>1$ のときである．

$X^2-tX-1=0$

この左辺を $f(X)$ とおけば，$f(0)=-1<0$ より

$f(1)=-t<0$　すなわち　$t>0$ のときである．

よって　$t=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

（※　$x>0$ のとき　$3^x>3^{-x}$ より　$3^x-3^{-x}>0$　つまり　$t>0$ である．
よって　$t=\dfrac{3}{2}$　のみとなる．）

また，$9^x-9^{-x}=(3^x+3^{-x})(3^x-3^{-x})$

$(3^x+3^{-x})^2=(3^x-3^{-x})^2+4=t^2+4=\dfrac{25}{4}$　よって　$3^x+3^{-x}=\dfrac{5}{2}$

$3^x-3^{-x}=t=\dfrac{3}{2}$

したがって　$9^x-9^{-x}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。